第 43 卷 第 12 期
2018 年 12 月

武汉大学学报 · 信息科学版
Geomatics and Information Science of Wuhan University

Vol. 43 No. 12
Dec. 2018

DOI:10.13203/j.whugis20180331

文章编号:1671-8860(2018)12-1797-14

光束法平差简史与概要

单 杰[1]

1 普渡大学土木工程学院,美国 西拉法叶市,47907

摘 要:光束法平差是当前摄影测量和计算机视觉及机器人领域通用的一种利用影像进行定位的理论与方法。自诞生以来,通过多个学科学者的共同努力,其在理论上和方法上都有了全面和完备的发展,也备受多个交叉学科学者的关注。首先试图从历史发展的角度,介绍光束法平差的起源、模型的建立及其扩展,然后讨论其处理系统误差和粗差的方法及其解算方法。时间跨度大致涵盖光束法平差发展的 60 a,涉及的贡献主要来自摄影测量,但也包括了大地测量、计算机视觉和机器人领域的代表性工作。最后指出当前光束法平差的几个发展动态。文末附有光束法平差涉及的几个相关人物的简介。

关键词:光束法平差;系统误差;粗差;简史

中图分类号:P231 **文献标志码**:A

光束法(平差)自 20 世纪 50 年代末提出以来已经走过了一个甲子。给定在不同位置获取的同一场景的多张图像,光束法平差可以定义为同时确定描述场景的物方点的三维坐标、相机的外方位元素(参数)以及相机的内方位元素(光学特性或参数)的问题(引自 https://en.wikipedia.org/wiki/Bundle_adjustment)。本文主要回顾光束法平差的相关理论问题,尽可能不涉及具体的应用。

光束法平差是建立在解析摄影测量的许多基本原理之上的。在光束法平差理论和方法建立之前或期间,解析摄影测量有许多重要的工作[1]。如 Doyle[2] 所述,在德国,代表性的学者是 Finsterwalder 和 von Gruber。Finsterwalder 在 1897 年德国数学学会的主题演讲中报道了他关于解析摄影测量的基础工作[3];另外,他还为数学百科全书撰写了一篇关于摄影测量的文章(1906)。Finsterwalder[4] 的工作包括建立了单像和双像解析几何,主要是空间后方交会(即解求相片的外方位元素)和空间前方交会(解求物方点的三维坐标),双像的相对定向和绝对定向;同时也研究了空间后方交会的奇异情况,以及光线相交必须满足的解析条件。这在很大程度上为现代摄影测量的矢量描述奠定了基础。此外,他还介绍了冗余光线重建的必要性,并使用最小二乘理论来描述相应光线之间的矢量关系[2]。von Gruber[5] 对空间后方交会进行了研究[2],他的重要贡献是平面间投影变换的微分公式,后来,他致力于蔡司公司摄影测量仪器的研发[2]。

20 世纪 30 年代,美国的解析摄影测量也有重要的发展。从 1930 年开始,Church[6-10] (1934—1948)出版了一系列内部报告总结其工作[11]。他利用光线间的方向余弦,原创性地提出了单张照片空间后方交会的分步解算方法:①确定摄站的位置坐标;②确定姿态角,两步交替迭代进行。该方法一直沿用至今,成为解析摄影测量中最常用的计算方法[2,12]。然而,他所有的解决方案都是显式的,也就是说,没有考虑使用冗余地面控制点;另外,他的求解方法中没有进行误差分析。需要说明的是,这种摄影机位置和姿态角分开解算的策略直到近期还在被使用和研究。

1 光束法平差的建立

光束法平差理论和方法建立于 20 世纪 50 年代的美国。1953 年,位于美国马里兰州阿伯丁的弹道研究实验室(Ballistic Research Laboratories,BRL)的弹道测量实验室(Ballistic Measurements Laboratory,BML)主任 Schmid 博士提出了光束法平差的雏形,其方法的重要特征为:初等的矩阵表述、严格正确的最小二乘解、任意多像片同时求解、完整的误差传播分析[2]。当时这些工作主要是在内部报告中收集的[13-15]。Brown 对

收稿日期:2018-10-20

作者简介:单杰,博士,美国普渡大学教授,近期主要研究方向为地理空间数据处理。jshan@purdue.edu

光束法平差理论和方法的建立、完善和实际应用有重要贡献，他在 1952 年加入 Schmid 在 BRL 领导的小组，一起研究用弹道摄影机确定卫星的轨道[2,16]。后来，他于 1955 年加入 RCA 公司的导弹测试项目，提出了摄影机检校的新方法和光束法平差解算的数学公式，同时解算摄影机的外部定向参数、测量目标的空间坐标，以及摄像机内部定向和系统径向透镜畸变，也即摄影机内外方位和地面坐标的整体求解。而在此之前人们都是先独立地确定外部定向参数，然后再确定物方点的坐标[17-20]。随后，Brown 等先后发表了多篇光束法平差的内部报告和文章，详细叙述了大规模光束法平差的解算方法[21-25]。进入 20 世纪 70 年代，Brown[26-27] 对光束法平差作了系统详细的推演和阐述，并广为宣传，他们使用的符号也是现在许多教科书上使用的符号。

关于这些和以后几年的区域网平差工作，可以参见 Ayeni[28] 的详细和系统的总结，其中收录了多达 356 篇参考文献，并对航空三角测量的发展和方法进行了全面的综述。Triggs 等[29] 的工作则从计算机视觉的角度对光束法平差进行了历史回顾，同时也非常全面地介绍了相关的模型、解算、应用等问题。

需要说明一点，据 Doyle[2] 介绍，Schut[30-32] 努力将共面概念和条件用于解析三角测量。虽然他积极倡导光束法，但考虑到当时计算机能力的局限性，他提出了航带法平差，即首先依次计算航带中每张照片的相对方位，再将航带坐标调整到地面控制点上。现在计算机视觉中流行的运动恢复结构(structure from motion，SfM)和同位定位与建图(simultaneous localization and mapping，SLAM)中的增量构网方法与 Schut 早期的动机思路是相同的。

顺便指出，Thompson[33] 也提出了一种相对定向方法。他没有使用旋转角度，而是改用 Rodrigues 形式的旋转矩阵，从而完全避免三角函数的计算，提高计算的简便性和速度。然而，这个相对定向的数学模型被 Longuet-Higgins[34] 独立推出，并引入了基本矩阵(fundamental matrix)(以及后来的本质矩阵(essential matrix))的概念，提出了著名的 8 点算法，解算投影空间下的相对定向问题。Longuet-Higgins 的这一工作通常被认为是 SfM 的开端[35]。从此，相对定向(亦扩展到 SfM)吸引了学者进行系统、广泛、深入的研究[35-37]。

2 光束法平差的数学模型

光束法平差的数学模型是指光束法平差中观测数据与参数之间的关系。它首先包括成像模型，即图像、物体及相机之间的数学关系，通常是指三者在同一直线上的事实，即共线方程。几十年来有几种不同的方式来表示这种基本关系。另外，在光束法平差发展的历程中，也不断有新的观测数据或条件(约束)引入到平差计算中来，这些观测数据与未知参数的关系也构成了对传统光束法模型的扩展。

2.1 针孔相机的成像模型——共线方程

2.1.1 欧氏几何下的成像模型

在欧氏几何下，图像的量测值与理论值是相似的，此时的成像模型的基本关系是：

$$\boldsymbol{a}_i = \lambda_i \boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{t}) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{a}_i = (x_i, y_i, -f)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{p}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^{\mathrm{T}}$ 是图像空间和物方空间中点的笛卡尔坐标；λ_i 是尺度因子；$\boldsymbol{t}$ 是摄影中心的物方坐标(平移向量)；$\boldsymbol{R}$ 是旋转矩阵，即

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\omega, \varphi, \kappa) \tag{2}$$

式中，ω、φ、κ 是方位元素。旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是正交的，旋转矩阵和摄影中心位置 $\boldsymbol{t}$ 构成影像的外方位元素。影像的内方位元素则通常包括像主点坐标(x_0, y_0)和摄像机的物镜焦距 f 以及物镜畸变参数。

2.1.2 投影几何下的成像模型

在投影几何下，图像的量测空间与物方空间不再相似，而是允许产生线性变形，此时，取而代之的是数学意义下一般的投影变换：

$$\bar{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{L}\,\bar{\boldsymbol{p}}_i \tag{3}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{a}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{p}}_i = (X_i, Y_i, Z_i, 1)^{\mathrm{T}}$ 分别是图像和物方空间中点的齐次坐标；投影变换矩阵 $\boldsymbol{L}$ 中共有 11 个独立参数($\boldsymbol{L}$ 为 3×4 的矩阵，一般指定$L_{34}=1$)。

将投影变换的一般公式(3)和摄像机的内部和外部参数的概念相结合[38-39]，有：

$$\underset{3\times1}{\bar{\boldsymbol{a}}_i} = \underset{3\times4}{\boldsymbol{P}}\ \underset{4\times1}{\bar{\boldsymbol{p}}_i} = \underset{3\times3}{\boldsymbol{K}}\,[\underset{3\times3}{\boldsymbol{I}} \mid \underset{3\times1}{\boldsymbol{0}}]\begin{bmatrix} \underset{3\times3}{\boldsymbol{R}} & \underset{3\times1}{\boldsymbol{t}} \\ \underset{1\times3}{\boldsymbol{0}} & \underset{1\times1}{1} \end{bmatrix}\underset{4\times1}{\bar{\boldsymbol{p}}_i} \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 对应于式(3)中的投影变换矩阵 $\boldsymbol{L}$；相机的内方位元素在 $\boldsymbol{K}$ 矩阵中体现，

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} f_x & \alpha & x_0 \\ 0 & f_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中，f_x、f_y是图像平面在 X 轴方向和 Y 轴方向的放大系数；α 为坐标歪斜；x_0、y_0为像主点坐标。

在摄影测量界，式(3)最早由 Abdel-Aziz 和 Karara[40](1971，2015 年重印)独立导出。当时他们欲将坐标仪量测的带有线性误差或变形的坐标

直接与物体空间坐标建立关系,因而命名为直接线性变换(direct linear transform,DLT)。正如 Wolf[41]指出,这是摄影测量的一个基本而重要的拓展。它允许人们处理非专业传感器拍摄的相片,因而可以满足当前计算机视觉中许多应用的需要,其中许多图像通常都来自智能手机或其他未检校的非测量相机。研究表明,这 11 个独立参数可以被解释为 6 个用于外部定向,5 个用于内部定向(3 个与主点和主距有关,2 个与图像平面中的仿射变换有关)。目前计算机中的 SfM 和 SLAM 多用方程(5)来描述所使用的相机模型。

2.2　线阵扫描图像成像模型

以上关系仅适用于针孔相机,无论是量测相机(式(1))还是非量测相机(式(3)和(4)),对于航空航天测绘中经常使用的推扫式相机,它们的外方位元素是随时间变化的,在这个假设下,对于线阵推扫相机,其传感器的成像模型可以通过使经典共线方程(1)中的像空间坐标为:

$$\boldsymbol{a}_i = (0, y_i, -f)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

其中,y 垂直于飞行方向。

另外,传感器位置和指向也表示为时间序列的函数。针对推扫式航天摄影图像处理需要,简化处理模型,人们将 DLT 扩展为有理函数模型(rational function model,RFM)[42],以方便最终用户。它们是投影变换的非线性、高阶有理多项式:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{Num}_s(X,Y,Z)}{\mathrm{Den}_s(X,Y,Z)} = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{3}\sum\limits_{j=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{j} a_m X^{i-j} Y^{j-k} Z^k}{\sum\limits_{i=0}^{3}\sum\limits_{j=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{j} b_m X^{i-j} Y^{j-k} Z^k} \\ y = \dfrac{\mathrm{Num}_l(X,Y,Z)}{\mathrm{Den}_l(X,Y,Z)}) = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{3}\sum\limits_{j=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{j} c_m X^{i-j} Y^{j-k} Z^k}{\sum\limits_{i=0}^{3}\sum\limits_{j=0}^{i}\sum\limits_{k=0}^{j} d_m X^{i-j} Y^{j-k} Z^k} \end{cases} \tag{7}$$

在 Num 和 Den 分别是高阶(通常是 3 次)多项式的情况下,它们中的每一个通常都有 20 个参数,其中 (X,Y,Z) 通常是纬度、经度、高度;a_m、b_m、c_m、d_m 这些参数被称为有理多项式参数(rational polynomial coefficient,RPC)参数,通常由卫星影像供应商提供给影像用户,以便他们完成物方空间与图像空间的变换。应该注意,这种传感器模型没有几何意义,是作为高阶有理多项式(两个高阶多项式的比)的纯数学变换。

2.3　外方位元素约束的数学模型

由于机载全球定位系统(global positioning system,GPS)和惯性导航系统(inertial navigation system,INS)(两者的集成也称为定位定姿系统(position and orientation system,POS))的广泛使用,它们相应的测量值也可以在光束法平差中使用,一般通称为联合平差[43-46]。以下提供一个简短的摘要。

GPS 和 INS 测量提供了对传感器位置和方向的近乎直接的测量。附加方程可以添加到传统的光束法平差中[47-52]:

$$\boldsymbol{s}_{\mathrm{obs}} = \boldsymbol{s} \tag{8}$$

式中,$\boldsymbol{s}_{\mathrm{obs}}$代表参数 $\boldsymbol{s}$ 的观测量;$\boldsymbol{s}$ 是外部参数。作为该主题早期的努力,外部定向元素对光束法平差质量影响的研究包括文献[47-51]。

飞行器轨迹(轨道)约束也可以成为是光束法平差的一部分。这个约束的一般形式为:

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{m}, t) \tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{s}$ 是飞行器的位置和姿态(外定向参数);$\boldsymbol{m}$ 是一组描述传感器轨道或轨迹的参数。对于航空摄影的推扫式摄影,$\boldsymbol{s}$ 可以是一组关于时间 t 的多项式;对于卫星摄影,也可以选用轨道力学中的数学模型,如开普勒方程。后者首先在概念上由 Brown 和 Trotter[53-54]在月球摄影测量中引入,后来单杰[46]进行了一些模拟实验分析。

2.4　地面数据约束的数学模型

当参加光束法平差计算的地面点坐标具有先验值时,它们可以作为地面控制点以类似于式(8)的形式参加计算。而对于地面点之间距离的观测数据,可以采用以下方程:

$$d = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \tag{10}$$

需要说明的是,该方程也可以用于空中测距数据,此时其中一个点为飞行器的空中坐标,另一个点为激光测量点。这种情况在近期的卫星摄影测绘中得到越来越多的应用,如激光高度计测量平台到激光足迹的距离[55]。

另一种地面数据是数字高程模型(digital elevation model,DEM)。众多已有的数字高程模型 $Z_i = g(X_i, Y_i)$ 可以参加到光束法平差的计算中,其数学模型可以写作:

$$Z(X,Y)=\underset{(X_i,Y_i)\in N(X,Y)}{\mathrm{Surface}}\left[g(X_i,Y_i)\right] \quad (11)$$

式中，$N(X,Y)$是位置(X,Y)处的局部邻域；Surface是预定义的高程曲面描述(插值或拟合)，它通常是一个曲面内插函数[56-59]。

3 系统误差和粗差

3.1 图像坐标中的系统误差

此类系统误差通常通过扩展上一节中的成像模型来改正，其系统误差的参数则在光束法平差中一并确定，亦即自检校。一般的变形可表示为：

$$\Delta \boldsymbol{a}=(\Delta x,\Delta y,\Delta f)^{\mathrm{T}} \quad (12)$$

$(\Delta x,\Delta y)$可以取不同的表达，并加入到式(1)、(3)和(4)的影像坐标量测值上作为对成像模型的扩展。自20世纪70年代以来，很多学者针对胶片相机或扫描照片如何最好地选择系统误差的表达(式(12))做了大量的工作。代表性的有基于相片物理变形的相当全面的Brown模型[27,60-61]：

$$\begin{cases}\Delta x=a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2+a_6x^2y+a_7xy^2+\dfrac{x}{f}(c_1x^2+c_2xy+c_3y^2+c_4x^3+\\ \qquad c_5x^2y+c_6xy^2+c_7y^3)+x(k_1r^2+k_2r^4+k_3r^6)+p_1(y^2+3x^2)+2p_2xy-x_0-(x/f)\mathrm{d}f\\ \Delta y=b_1x+b_2y+b_3x^2+b_4xy+b_5y^2+b_6x^2y+b_7xy^2+\dfrac{y}{f}(c_1x^2+c_2xy+c_3y^2+c_4x^3+\\ \qquad c_5x^2y+c_6xy^2+c_7y^3)+y(k_1r^2+k_2r^4+k_3r^6)+2p_1xy+p_2(x^2+3y^2)-y_0-(y/f)\mathrm{d}f\end{cases} \quad (13)$$

式中，r为像点辐射距离，$r^2=x^2+y^2$；$a_1\sim a_7$、$b_1\sim b_7$为底片变形系数；$c_1\sim c_7$为底片弯曲系数；k_1、k_2、k_3为径向畸变系数；p_1、p_2为切向畸变系数；x_0、y_0、f是内方位元素，其改正值分别为δx_0、δy_0、δf。

另一个流行的模型是基于多项式的Ebner模型[60-62]，它是系统误差的纯数学表达式，没有充分考虑其物理意义：

$$\begin{cases}\Delta x=b_1x+b_2y-b_3(2x^2-4b^2/3)+b_4xy+b_5(y^2-2b^2/3)+b_7x(y^2-2b^2/3)+\\ \qquad b_9(x^2-2b^2/3)y+b_{11}(x^2-2b^2/3)(y^2-2b^2/3)\\ \Delta y=-b_1y+b_2x+b_3xy-b_4(2y^2-4b^2/3)+b_6(x^2-2b^2/3)+b_8(x^2-2b^2/3)y+\\ \qquad b_{10}x(y^2-2b^2/3)+b_{12}(x^2-2b^2/3)(y^2-2b^2/3)\end{cases} \quad (14)$$

式中，$b_1\sim b_{12}$为附加参数。当采用空中三角测量中常规3×3像点分布方案时，上述12个参数正交，亦即在形成法方程式时，有些系数会变为0。

对于数字传感器和相机中的系统误差，上述模型需要进行一定的修改[63]：

$$\begin{cases}\Delta x=-x_0-\dfrac{\bar{x}}{f}\Delta f_1+\bar{x}r^2k_1+\bar{x}r^4k_2+\bar{x}r^6k_3+(2\bar{x}^2+r^2)p_1+2p_2\bar{x}\bar{y}+b_1\bar{x}+b_2\bar{y}\\ \Delta y=-y_0-\dfrac{\bar{y}}{f}\Delta f_1+\bar{y}r^2k_1+\bar{y}r^4k_2+\bar{y}r^6k_3+2p_1\bar{x}\bar{y}+(2\bar{y}^2+r^2)p_2\end{cases} \quad (15)$$

式中，b_1、b_2是相似性和非正交参数；$\bar{x}=x-x_0$，$\bar{y}=y-y_0$；其他参数意义同前。

处理系统误差的一个环节是确定其参数的显著性或重要性。由于所选参数之间的强相关性，通常可能发生参数过度拟合，即一些选定的参数因太小(不显著)而无法确定或根本没有必要考虑。为解决此问题，通常使用显著性检验来检查自检校中的参数是否显著。这种检验的一般方程是：

$$t=|\hat{s}|/\hat{\sigma}_s \quad (16)$$

式中，$\hat{s}$和$\hat{\sigma}_s$分别是自检校参数s的估值和它的标准差，通常需要对法方程求逆来获得。在原假设H_0：$s=0$下，如果t小于某个给定的阈值，则接受H_0，自检校参数s不重要(显著)，因而可以在光束法平差中消除。

李德仁[64-66]研究了自检校参数的显著性，认为信号与噪声的比率(即信噪比)是影响参数是否显著的决定性因素，信噪比越小，越难以确定自检校参数。

3.2 粗差检测

粗差检测通常是在摄影测量的所有步骤中都需要的。由于所有观测数据都要参加光束法平差，因此其粗差检测变得至关重要和困难。同样，在20世纪80～90年代初期，发展了许多针对这一问题的方法。在光束法平差期间，用于粗差检测的代表性方法是Baarda方法[67]、李德仁方法以及鲁棒估计或选权迭代方法等。

3.2.1 Baarda方法

Baarda方法也称为数据探测方法，是一种经常使用的方法，其公式为：

$$\bar{v}_i=\frac{v_i}{\sigma_{v_i}}=\frac{v_i}{\sigma_0\sqrt{Q_{v_iv_i}}}\sim N(0,1) \quad (17)$$

式中,$\bar{v}$ 是标准残差;v 是残差;σ_v 是残差标准差;$\boldsymbol{Q}_{vv}$ 是残差协因数矩阵;i 表示第 i 个观测值。由于 $\boldsymbol{Q}_{vv}$ 的计算非常耗时,因此许多实践实际上并不使用严格的 σ_v 进行计算,而是使用某些近似值。典型的例子是使用 σ_0,即像点观测的标准偏差作为 σ_v 的近似值。在检测其他观测中的粗差时,例如地面控制点,则要使用相应的近似值。由于 σ_0 的真值是未知的,人们经常使用其后验估计,即 $\hat{\sigma}_0$。在显著性水平 0.001 下,$\bar{v}_i$ 阈值为 3.3,当超过此阈值时,则第 i 个观测值被认为具有显著的粗差。

3.2.2　迭代加权或稳健估计

虽然上述方法在理论上是严格的,但它们都需要使用残差的方差,这反过来又需要计算法方程组系数矩阵的逆矩阵,计算成本很高。此外,这些方法的推导通常假设只有一个粗差,多个粗差的复合效应不能分开。因此,需要找到实际应用上更有效的方法。迭代加权属于此类别,广泛用于光束法平差。

该方法的基本思想是给可能有粗差的观测值一个较小的权重,权值通常与其残差的大小成反比。在过去的几十年中,已经研究了若干用于光束法平差的稳健估计理论或选权迭代方法,如流行的丹麦法[61]:

$$P(v)=\begin{cases}P_0, & |v|\leqslant c\hat{\sigma}_v\\ P_0\exp\left(-\dfrac{|v|}{c\,\hat{\sigma}_v}\right), & |v|>c\hat{\sigma}_v\end{cases}\tag{18}$$

式中,P_0 是观测值没有粗差的权;v 是残差;$\hat{\sigma}_v$ 是标准差;c 是常量。当其残差超过其标准差 c 倍时,即被视为粗差,因而此观测值便得到一个较小的权值。通常 c 和 $\hat{\sigma}_v$ 多按经验给定。

3.2.3　李德仁方法

李德仁[61,68]建议不要估计单个观测值的残差,而是通过考察单个观测值的后验方差来确定它是否是一个粗差。这是通过将单个观测值的方差 $\hat{\sigma}_{ij}^2$ 与其所属的群体的方差 $\hat{\sigma}_i^2$ 进行比较来完成的,使用的公式为:

$$F_{ij}=\hat{\sigma}_{ij}^2/\hat{\sigma}_i^2\tag{19}$$

然后确定观测值的权值:

$$p_{ij}=\begin{cases}p_i=\hat{\sigma}_0^2/\hat{\sigma}_i^2, F_{ij}>T_F(\text{阈值})\\ p'_{ij}=\hat{\sigma}_0^2/\hat{\sigma}_{ij}^2, \text{其他}\end{cases}\tag{20}$$

式(20)意味着当观测值的方差不大于其所在组观测值的方差时,其权重将保持与该组观测的权相同,否则将通过对其估计的方差重新计算。

4　光束法平差的解算

4.1　线性模型

综合上面的一系列描述,光束法平差在统计回归分析上很接近最初的高斯-马尔科夫模型:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma_0^2\boldsymbol{I})\tag{21}$$

式中,$\boldsymbol{y}$ 是观测值向量;$\boldsymbol{x}$ 是未知数向量;$\boldsymbol{A}$ 是设计矩阵;观测值误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 满足正态分布且具有相同的方差。

Aitken[69]对上述高斯-马尔科夫模型进行了扩展,形成了广义最小二乘模型:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1})\tag{22}$$

式中各个变量的意义与式(21)相同,但是观测误差向量的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}=\sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1}$ 除 σ_0^2 外已知,并且不再是单位矩阵,$\boldsymbol{P}$ 也称作观测值的权矩阵。

确定未知参数是一个超定问题,通常遵循加权最小二乘准则,即最小化该残差向量的平方 Mahalanobis 长度:

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\underset{x}{\operatorname{argmin}}\left[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\right]\tag{23}$$

通常式(23)也写为如下的目标函数形式:

$$\Phi(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\rightarrow\min$$

由于目标函数是关于 $\boldsymbol{x}$ 的二次型,其估计量具有如下显式表达形式:

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{y}\tag{24}$$

其最小二乘解为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{y}$$

$\boldsymbol{x}$ 的方差为:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{xx}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\tag{25}$$

在方程(22)的假设下,可以证明广义最小二乘估计是无偏、一致、有效、渐近正态的,即最优线性无偏估计(best linear unbiased estimation, BLUE)。

需要说明的是,上述方法是基于式(22)的线性模型假设,即测量值是未知参数的线性函数。然而,光束法平差的数学模型实际上并非如此,再加之越来越多的各种类型观测数据和实际应用的出现,近几十年来形形色色的光束法平差算法的一个基本目的就是尽可能保证在这些情况下也能获得正确、稳定和有效的求解。

4.2　非线性模型

对于非线性模型,传统上多采用对模型进行不同程度的近似,然后对近似模型不断进行修正,反复迭代求解。

4.2.1　牛顿算法

它旨在找到非线性函数或非线性函数组一阶导数的根(亦即函数的驻点),由于要用到函数的二阶导数,故而也称为二阶迭代方法。对一般的非线性观测方程:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(\boldsymbol{0},\sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1})\tag{26}$$

可以写出下面的目标函数:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{x})) \tag{27}$$

按泰勒级数展开到二次项有[70-71]：

$$\Phi(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) \approx \Phi(\boldsymbol{x}) + \nabla\Phi(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \Delta\boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H} \Delta\boldsymbol{x} \tag{28}$$

式中，$\boldsymbol{H}$ 称为 Hessian 矩阵(由德国数学家 Hesse 于 19 世纪提出)，

$$\boldsymbol{H} = \{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_t} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_t \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_t \partial x_t} \end{bmatrix} \tag{29}$$

它是一个标量值函数对其自变量的二阶偏导数组成的方阵，其元素为多变量函数的局部曲率，其中 t 是未知参数的数量。假设函数是可微的，令式(28)对 $\Delta\boldsymbol{x}$ 的一阶导数为 0，则有：

$$\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x} = -\nabla\Phi(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

这个是最早的牛顿方法的一般形式。显然，人们必须知道目标函数的二阶导数才可以严密求解。然而，这在很多情况(如光束法平差)下是困难的。因此，就产生了多种避免使用 $\boldsymbol{H}$ 矩阵或获得近似 $\boldsymbol{H}$ 矩阵的所谓准牛顿(pseudo Newton)方法。

4.2.2 高斯-牛顿(Gauss-Newton)算法

通常也称为高斯方法，因为只需用到函数的一阶导数，故而也称为一阶迭代方法。

将式(26)展开并取至一次项可以得到：

$$\begin{gathered} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \sigma_0^2 \boldsymbol{P}^{-1}) \end{gathered} \tag{31}$$

式中，$\boldsymbol{J}$ 是式(26)的 Jacobian 矩阵，

$$\boldsymbol{J} = \{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_t} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_t} \end{bmatrix} \tag{32}$$

其中，n 是观测方程的数量。相应的最小二乘解为：

$$(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J}) \Delta\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \tag{33}$$

其中，$\Delta\boldsymbol{x}$ 是当前 $\boldsymbol{x}$ 的改正。通过迭代更新上述等式中的当前值，直到改正量可以忽略不计为止。需要说明的是，高斯-牛顿算法用于解决非线性最小二乘准则下的优化问题，但不能保证收敛或收敛的正确性(全局最小)。

4.2.3 Levenberg-Marquardt 算法

Levenberg-Marquardt(LM 或 LMA)算法也称为阻尼最小二乘法(damped least-squares, DLS)，最早的解为[72]：

$$(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J} + \lambda \boldsymbol{I}) \Delta\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \tag{34}$$

Levenberg 算法的缺点是，如果阻尼因子 $\lambda > 0$ 的值很大，则 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J}$ 的作用很小。Marquardt 提出根据曲率缩放梯度的每个分量，使解在沿着小梯度的方向有较大的移动，从而加速了在小梯度方向上的收敛。因此，Marquardt[73] 用由 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J}$ 的对角元素组成的对角矩阵替换了单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，得到了 LM 算法：

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J} + \lambda \mathrm{Diag}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J})) \Delta\hat{\boldsymbol{x}} = \\ \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \end{gathered} \tag{35}$$

需要说明的是，LM 算法的本质是在高斯-牛顿算法和梯度下降方法之间进行插值或组合。在每次迭代时，一般需要调整 λ，对于大的 λ 值，该步骤将大致在梯度的方向上进行。因此，在许多情况下，即使初值不理想时，也能得到最优解；但当有较好的初值时，LM 算法往往比高斯-牛顿方法慢一点。此外，与许多拟合算法一样，LM 仅找到局部最小值，不一定是全局最小值[74]。

与牛顿方法相比，LM 方法可以说是一种准牛顿方法，因为其试图对线形模型下的 $\boldsymbol{H}$ 矩阵 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J}$ 进行修正，其引入的改正因子(式(35))正是和曲率有关。另外，BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)算法也是一种准牛顿方法，有研究表明，即使对于非平滑优化，其也具有良好的性能[75-76]。

4.3 启发式算法

启发式算法对优化问题的数学模型(如式(26)和(27))做出很少或没有假设。它的目的是在一个合理的时间内产生一个解决方案，这个解决方案通常可能不是最好的，但可以作为其他优化算法的一个好的近似，从而提高整个求解过程的效率。需要指出的是，启发式是人工智能领域和思维计算的基础，当一个问题还没有已知算法时，利用启发式算法也可以求解。在优化问题解算中，研究了许多启发式算法，如爬山法、人工蜂群算法、模拟退火、进化算法、基因算法等。下面简单介绍 SLAM 中使用比较多的粒子群优化(particle swarm optimization, PSO)。

PSO 最初作为鸟群或鱼群中有机体运动的形式化表示，Kennedy 和 Eberhart[77] 将其用于模拟社会行为。PSO 通过迭代来解求一个优化问题。开始时，先随机产生一组候选解，每一个候选解就是一个粒子，然后根据每个粒子当前的位置、粒子群重心的位置，根据简单的数学公式得到该粒子的移动速度和下一步的位置，即对候选解进

行更新,每个粒子的运动受其局部最佳已知位置的影响,但也被引导到搜索空间中最佳的位置,这些位置随着其他粒子找到更好的位置而更新。最终,会将群体推向最佳解决方案。

$$\begin{cases} v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1(p_i(t) - x_i(t)) + \\ \quad c_2(g - x_i(t)) \\ x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \end{cases} \tag{36}$$

式中,c_1和c_2是粒子移动的加速度;w 称为惯性;g 是社会(群体)项;p 是(个人)认知项。

PSO 对被优化的问题做出很少或没有假设,并且可以在非常大的空间内搜索候选解。与传统的牛顿方法不同,PSO 不需要被优化的问题的梯度,即不要求优化问题是可微分的。这一方法经常在机器人视觉的自主定位和测绘中使用[78-79]。

4.4　线性方程组的相关解法

光束法平差通常归结为解算一个大型线性方程组,这里介绍几个常用的特色方法。

4.4.1　正交分解方法

对于线形模型(式(21)),若存在正交矩阵 $\underset{n\times n}{\boldsymbol{Q}}$ 和上三角矩阵$\underset{n\times t}{\boldsymbol{R}}$,使得:

$$\underset{n\times t}{\boldsymbol{A}} = \underset{n\times n}{\boldsymbol{Q}}\,\underset{n\times t}{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \underset{n\times t}{\boldsymbol{Q}_1} & \underset{n\times(n-t)}{\boldsymbol{Q}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{t\times t}{\boldsymbol{R}_1} \\ \underset{(n-t)\times t}{\boldsymbol{0}} \end{bmatrix} = \underset{n\times t}{\boldsymbol{Q}_1}\,\underset{t\times t}{\boldsymbol{R}_1} \tag{37}$$

则最小二乘问题$\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{y}\|^2=\min$ 可变形为:

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{38}$$

因此,只要可以对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行分解,获得$\boldsymbol{Q}_1$和$\boldsymbol{R}_1$便可很容易求解未知参数矢量 $\boldsymbol{x}$。常用的正交分解方法有标准的 Gram-Schmidt 过程、Householder 方法、Givens 变换。一般来说,Householder 方法简单,且比 Gram-Schmidt 方法具有更高的数值稳定性,但不像 Givens 变换那样更容易并行化[80]。

需要说明的是,正交分解的方法是不需要像许多其他方法那样组成法方程的,因此在数值计算的稳定性上要优于传统的高斯-牛顿方法;当多种不同质数据结合在一起进行联合平差时,这个特点是有益的。

4.4.2　稀疏矩阵技术

光束法平差通常会形成一个大规模的线性方程组,涉及几千万个观测方程,几十万个未知数,因此,高效的求解策略是十分必要的。最早利用法方程带状结构的是 Brown[21,25,81],其研究的循环分块、折叠技术一直还在被广泛使用[82],其基本原理是基于 Schur 补方法(complement method)。若一个方程组的未知参数 $\boldsymbol{x}$ 可以分为$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$两部分,则有:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

它的解可以写成:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_1) \end{cases} \tag{40}$$

式中,$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C})$称为 $\boldsymbol{D}$ 的 Schur 补。具体来说,在光束法平差中,可以先解求相片的外方位元素$\boldsymbol{x}_1$,然后再解求地面点坐标$\boldsymbol{x}_2$,由于 $\boldsymbol{D}^{-1}$的结构比较简单,因此,组建和解算效率很高[27,61,81,83-85]。

近年来,有研究人员将计算数学技术中的稀疏矩阵技术与最小二乘优化方法结合起来,以提高解的稳定性和效率[75-76,86]。

5　发展中的光束法平差

近期中国的月球探测计划催生了许多光束法的研究和发展。Di 等[87]提出了一种自检校光束法平差,以消除嫦娥 2 号相机内方位元素误差的影响,使用三阶多项式拟合外部定向参数(卫星轨道),同时采取了一系列解算策略来确保解的稳健性和可靠性,保证了平差结果的精度和与其他独立数据的一致性。Wu 等[88]提出的区域网联合平差方法将嫦娥 2 号图像的多个条带和美国月球勘测轨道器(lunar reconnaissance orbiter,LRO)的激光高度计(lunar orbiter laser altimeter,LOLA)数据结合起来。参加平差计算的观测数据包括嫦娥 2 号图像的内外方位元素、航向和旁向立体图像的连接点以及激光测高计的地面点;参加计算的约束条件有局部表面约束和轨道高度约束。平差后,嫦娥 2 号的 DEM 与美国 LOLA DEM 有更好的一致性。近期,为消除轨道间较大的相对偏差,Yan 等[89]分析了嫦娥 2 号轨道精度对月球全球地形图产生的影响,提出通过嫦娥2 号图像全球平差来进行轨道优化,并验证了其效果。

光束法平差在卫星对地观测方面的主要发展是满足全球测绘的需要。王密等[90]和 Yang 等[91]研究了没有地面控制点的大规模光束法平差,其通过采用基于视角模型的几何校准方法补偿系统误差,使用了一系列技术来解决由于缺乏绝对约束而导致的秩亏问题,并用共轭梯度法来提高求解高阶方程的速度。研究表明,该方法能有效提高 ZY-3 卫星图像的定位精度。李海鸿等[92]提出使用由 RPC 参数计算得到、理论上适

用于各种光学卫星影像的成像模型，该模型无需了解具体卫星平台、传感器结构和检校参数，还可以进行自检校区域网平差，并使用 DEM 作为控制约束。

SfM 是计算机视觉中提出的概念和方法[93]。它在本质上与摄影测量中的解析空中三角测量很相近。structure 即指物体的几何特征，而 motion 则是指由传感器运动对物体进行连续摄影。因此，运动恢复结构就是通过估计从一组相片来恢复静止场景的三维结构。SfM 涉及 3 个主要阶段[35]：①提取图像中的特征（如兴趣点、线等），并在图像之间匹配这些特征；②利用上述图像匹配的结果对相机相对或绝对方位进行估计，经常使用的是通过 $\boldsymbol{F}$ 矩阵或 $\boldsymbol{E}$ 矩阵将新增的影像与已有的图形构网连接起来，在这些过程中往往都使用随机抽样一致算法（random sample consensus，RANSAC），以便剔除影像匹配中的粗差[94]；③使用估计的相机方位和对应特征确定物体的结构[35]。最后一步实际上就是光束法平差，可以序惯（增量）实现，摄像机方位被逐一解求并添加到集合中；也可以总体实现，即所有摄像机的方位同时得到解求；还有一种是分块实现的方法，即几个部分区域分别重建，然后再将其合并到全局中。需要指出的是，Kruppa[95]很早就建立了运动恢复结构定理，1977 年，Ullman[96]重新发现了这一定理[3]。

SLAM 是指移动机器人在行进过程中一边自行定位，一边对环境定位。当机器人使用摄影传感器时，便称为视觉 SLAM[97]。显然，视觉 SLAM 通常会用到光束法平差[98]。许多学者认为 SLAM 是实现真正自主移动机器人的关键。视觉 SLAM 流程通常分为前端和后端两个部分。前端包括用于检测和匹配关键点、边缘像素或甚至所有像素的算法和数据结构；后端使用先前 N 帧上的这些关键点匹配来估计相机方位和 3D 关键点位置。后端显然就是一个光束法平差计算，在 SLAM 中 3 个常用的算法是卡尔曼滤波、粒子滤波和光束法平差。

近年来，计算机视觉领域涌现了诸如 Ceres Solver[99]和稀疏集束调整[100]（sparse bundle adjustment，SBA）等光束法平差的开源代码，很大程度上推动了平差解算技术的普及和大众应用[101]。当前，成像传感器的快速发展导致获取的影像数据越来越多，光束法平差面临处理超大规模区域网影像的快速、稳健平差解算的问题。面对十万张、百万张甚至更大规模影像的平差问题，单台计算机的计算能力和内存大小没有能力承受。因此，基于多核中央处理单元（central processing unit，CPU）和图形处理单元（graphic processing unit，GPU）的并行计算技术逐渐被引入到光束法平差中并得到应用[86,102-103]，而分布式光束法平差技术[104-106]也是当前研究的一个热点。Zhang 等[105]首先从交替方向乘子法（alternating direction method of multipliers，ADMM）框架推导出分布式公式，将大规模光束法平差问题分解成多个可以分布式求解的子问题，进而利用多个计算机进行分布式平差解算，实现了 13.8 万张影像、1.002 亿连接点的整体光束法平差。

6　结　语

光束法模型是可扩展的。借助于测量平差的原理性框架，各种观测数据和约束条件可以不断加入到一个由影像测量值为基础的统一数学框架中，这个为光束法平差的通用性奠定了基础。

光束法模型是函数模型和统计模型的结合。作为函数模型，其允许将各种观测值表述为待估参数的函数；作为统计模型，其不但可以考虑各种观测数据和约束条件的先验特性，而且还可以估计待估参数的统计特性。

基于上述模型的光束法平差可以处理观测数据的偶然误差，但由于自动观测的增加及其不完善性，剔除经常出现的大量粗差通常需要一些非常规的策略，如稳健估计、RANSAC 等，这也对非线性问题求解策略的鲁棒性提出了要求，如用粒子优化等启发式方法获得有效可靠的初值。

未来光束法平差的发展是全方位的。多种观测设备的出现和使用需要将其观测值引入到光束法平差的统一框架下；与函数模型相比，统计模型往往是一个被忽视的内容，这不但包括建立严格的观测数据的统计模型，也包括获得可靠和完整的待估参数的统计特性，并对这些结果进行合理的解释和使用。

回顾摄影测量近百年来的发展，光束法平差无疑是得以传世并被广泛认可的精华。光束法的诞生和早期的发展是数学和测量学家共同努力的结果，近 20 a 来，计算机视觉界的加入使光束法的理论得以进一步完备。此外，众多新型传感器的出现和摄影测量应用的不断拓展，客观上也催生了摄影测量理论的不断发展和完善。光束法平差发展的历史证明了一个系统、完备的理论对于一个学科的发展壮大和生命力是至关重要的；以

测绘为目的的摄影测量需要追求更高、更深、更完美的目标，以创造更多、更好、经得起时间验证的理论和方法。

致谢：本文完稿后经陶鹏杰博士、刘玉轩同学核对、补充；李庆华同学对个别章节的修改提出了建议；英国伦敦大学学院 Ian Dowman 教授、The Photogrammetric Record 期刊前主编 Keith Atkinson 帮助寻找有关 E. H. Thompson 的信息；美国普渡大学 Edward Mikhail 教授、加拿大卡尔加里大学 J. A. Rodrigue Blais 教授帮助寻找有关 G. H. Schut 的信息；加拿大 York 大学 Costas Armenakis 教授提供了 G. H. Schut 的详细资料，在此一并表示感谢。

参　考　文　献

[1] Gruner H. Photogrammetry: 1776－1976[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1977, 43(5): 569-574

[2] Doyle F J. The Historical Development of Analytical Photogrammetry[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1964,30(2): 259-265

[3] Buchanan T. Photogrammetry and Projective Geometry: A Historical Survey[C]. Optical Engineering and Photonics in Aerospace Sensing, Orlando, FL, United States, 1993

[4] Finsterwalder S. Die Geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie[J]. *Jahresberdeutsch Math-Verein*, 1987,6(2):1-41

[5] von Gruber O. Photogrammetry: Collected Lectures and Essays[M]. London: Chapman & Hall, 1932

[6] Church E. Revised Geometry of the Aerial Photograph[R]. Syracuse University, Syracuse, NY, USA, 1934

[7] Church E. Determination of the Scale Data for Two Aerial Photographs. Bulletin No. 13[Z]. Syracuse: Syracuse University, NY, USA, 1942

[8] Church E. Notes on the Rectification of Tilted Aerial Photographs. Bulletin No. 14[Z]. Syracuse: Syracuse University, NY, USA, 1944

[9] Church E. Revised Geometry of the Aerial Photograph. Bulletin No. 15[Z]. Syracuse: Syracuse University, NY, USA, 1945

[10] Church E. Theory of Photogrammetry. Bulletin No. 19[Z]. Syracuse: Syracuse University, 1948

[11] Quinn A O. Professor Earl Church[J]. *Photogrammetric Engineering*, 1975,41(5):595-601

[12] Byrd W O. Some Elementary Aspects of Computational Problems in Photogrammetry[R]. Mapping and Charting Research Laboratory, Ohio State University, Ohio, USA, 1951

[13] Schmid H. Spatial Triangulation by Means of Photogrammetry[R]. Ballistic Research Laboratories, Report No. 784, Washington D C, USA, 1951

[14] Schmid H. An Analytical Treatment of the Orientation of a Photogrammetric Camera[R]. Ballistic Research Laboratories Report No. 880, Maryland, USA, 1953

[15] Schmid H. A General Analytical Solution to the Problem of Photogrammetry[R]. Ballistic Research Laboratories Report No. 1065, Aberdeen Proving Ground, Maryland, USA, 1959

[16] Brown J. Duane C Brown Memorial Address[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2005,71(6):677-681

[17] Brown D C. A Treatment of Analytical Photogrammetry with Emphasis on Ballistic Camera Applications[R]. RCA Data Reduction Technical Report No. 39, Florida, USA, 1957

[18] Brown D C. A Solution to the General Problem of Multiple Station Analytical Stereotriangulation[R]. RCA Data Reduction Technical Report No. 43, Patrick Air Force Base, Florida, USA, 1958

[19] Brown D C. Photogrammetric Flare Triangulation[R]. RCA Data Reduction Technical Report No. 46, Florida, USA, 1958

[20] Brown D C. Results in Geodetic Photogrammetry I[R]. RCA Data Processing Technical Report No. 54, Florida, USA, 1959

[21] Brown D C. An Advanced Reduction and Calibration for Photogrammetric Cameras[R]. Air Force Cambridge Research Laboratories, Cambridge, USA, 1964

[22] Brown D C, Davis R G, Johnson F C. The Practical and Rigorous Adjustment of Large Photogrammetric Nets[R]. RADC TRD-64-092, Rome Air Development Center, Rome, NY, USA, 1964

[23] Davis R G. Advanced Techniques for the Rigorous Analytical Adjustment of Large Photogrammetric Nets[J]. *Photogrammetria*, 1967, 22(5): 191-197,199,201-205

[24] Brown D C. A Unified Lunar Control Network[J]. *Photogrammetric Engineering*, 1968a, 35(12): 1 272-1 292

[25] Brown D C. Inversion of very Large Matrices Encountered in Large Scale Problems of Photogrammetry and Photographic Astrometry[C]. Confe- rence of Photographic Astrometric Technique, University of South Florida, Tampa, Florida, USA, 1968

[26] Brown D C. Close-Range Camera Calibration[J]. *Photogrammetric Engineering*, 1971,37(8):855-

866

[27] Brown D C. The Bundle Adjustment—Progress and Prospects[C]. The 13th Congress of the International Society for Photogrammetry, Helsinki, Finland, 1976

[28] Ayeni O O. Phototriangulation: A Review and a Bibliography[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1982,48(11):1 733-1 759

[29] Triggs B, McLauchlan P F, Hartley R I, et al. Bundle Adjustment—A Modern Synthesis[C]. International Workshop on Vision Algorithms, Corfu, Greece, 1999

[30] Schut G H. Analytical Aerial Triangulation and Comparison Between It and Instrumental Aerial Triangulation[J]. *Photogrammetria*, 1955, 12 (55):311-318

[31] Schut G H. An Analysis of Methods and Results in Analytical Aerial Triangulation[J]. *Photogrammetria*, 1957,14(1):16-33

[32] Schut G H. Remarks on the Theory of Analytical Aerial Triangulation[J]. *Photogrammetria*, 1959, 16 (2): 57-66

[33] Thompson E H. A Rational Algebraic Formulation of the Problem of Relative Orientation[J]. *Photogrammetric Record*, 2010, 3(14): 152-157

[34] Longuet-Higgins H C. A Computer Algorithm for Reconstructing a Scene from Two Projections[J]. *Nature*,1981, 293(5 828): 133-135

[35] Ozyesil O, Voroninski V, Basri R, et al. A Survey on Structure from Motion [J]. *Acta Numerica*, 2017, 26: 305-364

[36] Horn B K P, Harris J G. Rigid Body Motion from Range Image Sequences[J]. *CVGIP: Image Understanding*, 1991, 53(1): 1-13

[37] Shan Jie. Programmetric Theory in Stereo Vision [J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*,1998,23(4):377-382(单杰. 立体视觉中的摄影测量理论[J]. 武汉测绘科技大学学报,1998, 23(4): 377-382)

[38] Melbouci K, Collette S N, Gay-Bellile V, et al. Bundle Adjustment Revisited for SALM with RGBD Sensors[C]. The 14th IAPR International Conference on Machine Vision Applications (MVA), Miraikan, Tokyo, Japan,2015

[39] Schindler K. Mathematical Foundations of Photogrammetry[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag,2014

[40] Abdel-Aziz Y I,Karara H M. Direct Linear Transformation from Comparator Coordinates into Object Space Coordinates in Close-Range Photogrammetry [J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2015,81(2):103-107

[41] Wolf P. Houssam Mahmoud Karara Memorial Address[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2001,67(7): 811-815

[42] Grodecki J, Dial G. Block Adjustment of High-Resolution Satellite Images Described by Rational Polynomials[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2003, 69(1): 59-68

[43] Ebner H. Combined Adjustment of Photogrammetric and Non-photogrammetric Information[C]. Rio de Janeiro, Brazil,1980

[44] EI-Hakim S F, Faig W. A Combined Adjustment of Geodetic and Photogrammetric Observations [J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1981, 47(1):93-99

[45] Li Deren, Yuan Xiuxiao. GPS-Supported Bundle Block Adjustment: An Empirical Results from Test Field Taiyuan [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*,1995,24 (2): 1-7(李德仁, 袁修孝. GPS 辅助光束法区域网平差——太原试验场 GPS 航摄飞行试验结果[J]. 测绘学报,1995,24 (2): 1-7)

[46] Shan Jie. Combined Adjustment of Photogrammetric and Non-photogrammetric Observations [M]. Beijing:Surveying and Mapping Press,1993(单杰. 摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差[M]. 北京: 测绘出版社,1993)

[47] Ackermann F. Utilization of Navigation Data for Aerial Triangulation [C]. The 15th ISPRS Congress,Comm III,Riode Janeiro,Brazil,1984

[48] Ackermann F. Camera Orientation Data for Aerial Triangulation[C]. The Symposium of Comm III, ISPRS,Rovaniemi,Finland,1986

[49] Ackermann F. Impact of GPS on Photogrammetry [C]. The 3rd South East Asian Survey Congress, Bali, Indonesia, 1988

[50] Ackermann F. Prospects of Kinematic GPS for Aerial Triangulation[J]. *ITC Journal*, 1992 (4): 326-328

[51] Li D, Shan J. Quality Analysis of Bundle Block Adjustment with Navigation Data[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1989,55(12): 1 743-1 746

[52] Jacobson K. Combined Bundle Block Adjustment Versus Direct Sensor Orientation[C]. ASPRS Annual Conference, Washington D C, USA,2000

[53] Brown D C, Trotter J E. SAGA, A Computer Program for Short Arc Geodetic Measurement of Satellite Observations[C]. SfN Virtual Conference, Air Force Cambridge Research Laboratory, Cambridge, USA, 1969

[54] Brown D C, Trotter J E. Extensions to SAGA for

Geodetic Reduction of Doppler Observations[R]. AFCRL Report No. 73-0177, Cambridge, USA, 1973

[55] Yoon J S, Shan J. Combined Adjustment of MOC Stereo Imagery and MOLA Altimetry Data[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2005,71(10):1 179 -1 186

[56] Ebner H,Müller F. Processing of Digital Three-Line Imagery Using a Generalized Model for Combined Point Determination[J]. *Photogrammetria*, 1987 , 41 (3) :173-182

[57] Rosenholm D, Torlegard K. Three-Dimensional Absolute Orientation of Stereo Models Using Digital Elevation Models[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 1988, 54(10):1 385-1 389

[58] Shan J. An Approach to Single Image Automatic Orientation and Point Determination by Using Orthoimages and a DTM[J]. *Journal of the British Remote Sensing and Photogrammetry Society*, 2001, 17(98):343-353

[59] Briskin G, Geva A, Rivlin E, et al. Estimating Pose and Motion Using Bundle Adjustment and Digital Elevation Model Constraints[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*,2017,53(4): 1 614-1 624

[60] McGlone J C. Manual of Photogrammetry,6th Edition[J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2016 , 82(4) :249-250

[61] Wang Z Z. Principles of Photogrammetry (with Remote Sensing)[M]. Wuhan: Wuhan University Press,1990

[62] Ebner H. Self Calibrating Block Adjustment[J]. *Bildmessung und Luftbildwesen*, 1976,44:128-139

[63] Fraser C. Automated Processes in Digital Photogrammetric Calibration[J]. *Orientation, and Triangulation, Digital Signal Processing*,1998, 8(4): 277-283

[64] Li Deren. The Correlation Analysis of a Self-Calibrating Bundle Block Adjustment and the Test of Significance of Additional Parameters[J]. *Journal of Wuhan Institute of Surveying and Mapping*, 1981, 6(2):46-65(李德仁. 自检校光束法区域网平差的相关分析和附加参数显著性检验[J]. 武汉测绘学院学报, 1981, 6(2):46-65)

[65] Li Deren. On the Signal-to-Noise Ratio in Self-calibrating Block Adjustment[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*,1982,11(3):16-30(李德仁. 论自检校区域网平差中的信噪比[J]. 测绘学报, 1982,11(3):16-30)

[66] Li Deren. Error Processing and Reliability Theory [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press,1988 (李德仁. 误差处理与可靠性理论[M]. 北京:测绘出版社,1988)

[67] Baarda W. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks[C]. Netherlands Geodetic Commission, New Series, Delft, Netherlands, 1968

[68] Li Deren. Ein Verfahrenzur Aufdeckunggrober Fehlermit Hilfe der a Posteriori Varianzschatzung[J]. *Bildmessung und Luftbildwesen*, 1983, 51(5): 184-187

[69] Aitken A C. On Least Squares and Linear Combinations of Observations[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*,1935,55: 42-48

[70] Engels C, Stewenius H, Nister D. Bundle Adjustment Rules[OL]. http://citeseerx. ist. psu. edu/viewdoc/download? doi=10. 1. 1. 222. 3253&rep=rep1&type=pdf,2006

[71] Zach C. Robust Bundle Adjustment Revisited[C]. The 13th European Conference on Computer Vision—ECCV 2014, Zurich, Switzerland,2014

[72] Levenberg K. A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*,1944, 2(4): 164-168

[73] Marquardt D W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters[J]. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, 1963, 11(2):431-441

[74] Lourakis M I A, Argyros A A. Is Levenberg-Marquardt the Most Efficient Optimization Algorithm for Implementing Bundle Adjustment? [C]. The 10th IEEE International Conference on Computer Vision, Washington D C, USA,2005

[75] Zhou W, Chen X. Global Convergence of a New Hybrid Gauss-Newton Structured BFGS Method for Nonlinear Least Squares Problems[J]. *SIAM Journal on Optimization*,2010,20 (5): 2 422-2 441

[76] Li Yanyan,Fan Shiyue, Sun Yanbiao, et al. Bundle Adjustment Method Using Sparse BFGS Solution [J]. *Remote Sensing Letters*, 2018,9(8):789-798

[77] Kennedy J,Eberhart R. Particle Swarm Optimization [C]. IEEE International Conference on Neural Networks, Perth,Australia, 1995

[78] Ji S P, Shi Y, Shan J, et al. Particle Filtering Methods for Georeferencing Panoramic Image Sequence in Complex Urban Scenes[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*,2015, 105:1-12

[79] Zou D, Tan P. CoSLAM: Collaborative Visual SLAM in Dynamic Environments[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelli-*

gence, 2013 , 35 (2) :354-366

[80] Borlin N. Bundle Adjustment with and Without Damping[J]. *Photogrammetric Record*, 2013, 28 (144):396-415

[81] Brown D C. Evolution, Application and Potential of the Bundle Method of Photogrammetric Triangulation[C]. Commission III of the International Society for Photogrammetry, Stuttgart, Germany,1974

[82] Jeong Y, Nistér D, Steedly D, et al. Pushing the Envelope of Modern Methods for Bundle Adjustment[J]. *Computer Vision & Pattern Recognition*, 2010, 34(8):1 474-1 481

[83] Granshaw S I. Bundle Adjustment Methods in Engineering Photogrammetry[OL]. https://doi. org/10. 1111/j. 1477-9730. 1980. tb00020. x,1980

[84] Shan Jie. Algorithms of the Combined Adjustment Program System WuCAPS[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*,1991,20(2):119-124(单杰. WuCAPS联合平差程序系统的算法[J]. 测绘学报,1991,20(2):119-124)

[85] Konolige K. Sparse Bundle Adjustment[C]. British Machine Vision Conference, Aberystwyth, UK, 2010

[86] Hansch R,Drude I, Hellwich O. Modern Methods of Bundle Adjustment on the GPU[C]. ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Prague,Czechia,2016

[87] Di K, Liu Y, Liu B, et al. A Self-calibration Bundle Adjustment Method for Photogrammetric Processing of Chang'E-2 Stereo Lunar Imagery[J]. *IEEE Trans on Geosci Remote Sens*, 2014,52 (9) :5 432-5 442

[88] Wu B, Hu H, Guo J. Integration of Chang'E-2 Imagery and LRO Laser Altimeter Data with a Combined Block Adjustment for Precision Lunar Topographic Modeling[J]. *Earth Planet Sci Lett*, 2014,391:1-15

[89] Yan W, Liu J, Ren X, et al. Orbit Optimization of Chang'E-2 by Global Adjustment Using Images of the Moon[J]. *Advances in Space Research*, 2015, 56(11):2 389-2 401

[90] Wang Mi, Yang Bo, Li Deren,et al. Technologies and Applications of Block Adjustment Without Control for ZY-3 Images Covering China[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2017, 42(4):427-433(王密,杨博,李德仁,等. 资源三号全国无控制整体区域网平差关键技术及应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2017, 42(4):427-433)

[91] Yang B,Wang M, Xu W, et al. Large-Scale Block Adjustment Without Use of Ground Control Points Based on the Compensation of Geometric Calibration for ZY-3 Images[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2017,134: 1-14

[92] Li Haihong,Cao Hui,Shi Jun. High Precision Positioning Technology and Practice of High-Resolution Optical Satellite Imagery[J]. *Geospatial Information*,2018,16(5): 1-8(李海鸿, 曹辉, 施俊. 高分辨率光学卫星影像高精度定位技术与实践[J]. 地理空间信息, 2018,16(5): 1-8)

[93] Dellaert F,Seitz S,Thorpe C,et al. Structure from Motion Without Correspondence[C]. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Hilton Head, South Carolina, 2000

[94] Schönberger J L,Frahm J M. Structure-from-Motion Revisited[C] . IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Las Vegas, NV, USA ,2016

[95] Kruppa E. Zur Ermittlung Eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innere Orientierung [J]. *Akad Wiss Wien*: *Math-Nat Kl*, 1913, 122:1 939-1 948

[96] Ullman S. The Interpretation of Structure from Motion[J]. *Proc R Soc Lond B Biol Sci*, 1979, 203 (1 153): 405-426

[97] Fraundorfer F, Scaramuzza D,Pollefeys M. A Constricted Bundle Adjustment Parameterization for Relative Scale Estimation in Visual Odometry[C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Anchorage, AK, USA, 2010

[98] Konolige K, Agrawal M. Frame SLAM: From Bundle Adjustment to Real-time Visual Mappping [J]. *IEEE Trans Robot*, 2008,24(5):1 066-1 077

[99] Agarwal S, Mierle K. Ceres Solver[OL]. http://ceres-solver. org,2010

[100] Lourakis M I A,Argyros A A. SBA: A Software Package for Generic Sparse Bundle Adjustment[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2009,32(1):1-30

[101] Shan Jie. Remote Sensing:From Trained Professionals to General Public[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*,2017,46 (10): 1 434-1 446 (单杰. 从专业遥感到大众遥感[J]. 测绘学报,2017,46 (10): 1 434-1 446)

[102] Liu X, Gao W, Hu Z Y. Hybrid Parallel Bundle Adjustment for 3D Scene Reconstruction with Massive Points[J]. *Journal of Computer Science and Technology*, 2012,27(6): 1 269-1 280

[103] Zheng M, Zhou S, Xiong X, et al. A New GPU Bundle Adjustment Method for Large-Scale Data [J]. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 2017, 83(9):633-641

[104] Eriksson A, Bastian J, Chin T J, et al. A Consensus-Based Framework for Distributed Bundle Adjustment[C]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Las Vegas, NV, United States, 2016
[105] Zhang R, Zhu S, Shen T, et al. Distributed very Large Scale Bundle Adjustment by Global Camera Consensus[C]. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), Venice, Italy, 2018
[106] Ramamurthy K N, Lin C, Aravkin A, et al. Distributed Bundle Adjustment[C]. IEEE International Conference on Computer Vision Workshop (ICCVW), Venice, Italy, 2017

附录：几个相关人物简介(个别内容来自 Wikipedia)

1. Benjamin Olinde Rodrigues(1795-10-06—1851-12-17)

法国银行家、数学家和社会改革者。1815 年获巴黎大学数学博士学位,毕业后成为银行家,曾发表关于政治、社会改革和银行业的著作。其在数学上的贡献是推导了向量的空间旋转公式、关于一系列正交多项式的公式和 Euler-Rodrigues 参数。

2. Sebastian Finsterwalder (1862-10-04—1951-12-04)

德国数学家和地质学家,慕尼黑工业大学数学教授。1886 年获得蒂宾根大学(University of Tübingen)博士学位,1915 年任德国数学学会主席。因为提出用重复摄影来测量阿尔卑斯山地质和结构及其冰川流量,被认为是冰川摄影测量之父。Finsterwalder 将 Rudolf Sturm 对“单应性问题”的分析用于立体图像三维重建,将投影几何用于摄影测量学,建立了解析摄影测量的数学基础。

3. Otto von Gruber (1884-08-09—1942-05-03)

德国大地测量学家和摄影测量学先驱。第一次世界大战期间,用航拍照片制作火炮地图,战后在柏林、维尔茨堡和慕尼黑从事数学、物理和地理学习,参加了冰川测量工作,于 1911 年获慕尼黑技术大学博士学位,后来对 1913 年德国-奥地利帕米尔探险队的地形数据进行处理,1920 年以“自动立体测图(Stereoautograph)及其对科学和技术的意义”的报告获得教授资格。然后,他在慕尼黑技术大学讲授应用数学和大地测量学,于 1922 年到蔡司(耶拿)进一步发展摄影测量光学仪器;1926 年任斯图加特技术大学大地测量研究所所长,开始在斯图加特引入摄影测量,同时继续担任蔡司的研究员;1930 年回到蔡司,领导大地测量仪器和图像测量设备部门。

4. Earl Church(1890-08-11—1956-05-11)

1911 年毕业于雪城(Syracuse)大学应用科学与土木工程学院。毕业后曾担任美国海岸和大地测量局的外业官员、美国边界委员会数学专家、华盛顿海岸调查大地测量计算员。1919—1921 年在宾夕法尼亚军事学院任教,1924 年被聘为雪城大学应用数学助理教授,1927 年转到应用科学学院(工程学院)。此后不久,他开始讲授航空摄影测量,由于学生人数不断增加,1929 年建立了摄影测量系,学生来自世界各地,这是美国第一个摄影测量专业。1930—1950 年间,他出版了 19 个学校的内部报告,详细描述摄影测量的基本原理和发展,成为美国最早的摄影测量教科书。1951 年,在他退休之际,雪城大学授予他工程博士学位。他是美国摄影测量学会的创始成员之一,被称为“美国摄影测量学之父”。

5. Gerhardus “Gerry” Hendrik Schut (1915-04-06—2014-04-29)

在荷兰代尔夫特工业大学土木工程学院大地测量和摄影测量专业学习,1947 年获得土地测量师文凭,1951 年获大地测量工程师学位。1947—1952 年,受雇荷兰道路和水道部测量分部,负责当时荷兰新几内亚约 400 条航带的摄影测量区域网平差。1952 年,加入加拿大国家研究委员会(National Research Council ,NRC)应用物理部摄影测量研究分部作访问者;1954 年起在 NRC 担任研究科学家,专门从事解析摄影测量方法的研究和编程,编写了航带法区域网平差程序、带自检校的独立模型法平差程序、带自检校的光束法平差程序。曾使用多伦多大学的世界上第一台商用计算机(FERUT),后来将他的程序移植到 IBM 大型机上,最终移植到 IBM PC 上。他所写的程序几十年来被世界各地的机构使用。1980 年退休后,成为一名狂热的徒步旅行者和越野滑雪运动员,同时,继续编写钟爱的计算机编程,在 80 多岁时开始学习 C 语言,并重写了他的所有程序。1967 年获美国摄影测量学会 Fairchild 摄影测量奖;被誉为现代摄影测量的奠基人之一。

6. Edgar Hynes Thompson (1910-01-13—1976-04-09)

伦敦大学学院摄影测量与大地测量教授。在 Cheltenham College, Woolwich 皇家军事学院学习,1930 年获得皇家工程师并前往剑桥唐宁学院。1934 年,被任命为战争办公室空军测量委员会的研究官员,30 年代晚期开发了第一批立体坐标量测仪,第一台摄影测绘绘图机(后因二战而中止)。他也是一位才华横溢的数学家,发表了许多地图投影文章。1938 年加入军械测量局,二战期间,被派往中东,1944 年被颁发英帝国勋章 (O. B. E)。1944 年发表了可能是第一个相对定向的迭代方法。1951 年 5 月,从陆军退役接任摄影测量教授。1969 年,他被剑桥大学授予理学博士学位,在 1972 渥太华举行的国际摄影测量学会第十一届大会上被选为 7 名荣誉会员之一。

7. Hellmut H. Schmid (1914-09-12—1998-04-27)

苏黎世联邦理工学院(Eidgenössische Technische Hochschule, ETH)大地测量学和摄影测量学教授。1934 年在德国 Dresden (德累斯顿)理工大学学习大地测量和摄影测量,1938 年获 Dipl.-Ing 学位,1941 年获得博士学位,此后从事 V-2 火箭弹道测量工作。二战以后,他来到美国。1950 年开始在马里兰州阿伯丁“弹道研究实验室(Ballistic Research Laboratory, BRL)”工作,试图用摄影的方式确定火箭的轨迹。期间,他与 D. C. Brown 富有成效的合作,提出了光束法平差和解析摄影测量的矩阵形式。60 年代以后,他提出并设计了世界卫星大地测量网络(passive geodetic earth orbiting satellite, PAGEOS),用分布全球 6 个大洲的 46 个移动观测站同步摄影观测

4 000 km 高空的 40 m 长特制气球卫星，定位精度优于 1∶100万（约为±（4～6）m），当时意味着洲际测量精度提高了 10～20 倍。1971 年，德国波恩大学授予他荣誉博士称号，1974 年成为大地测量和摄影测量研究所的教授，1985 退休后回到美国。

8. Hugh Christopher Longuet-Higgins（1923-04-11－2004-03-27）

1941 年获牛津大学奖学金修化学专业，但也兼修音乐，1947 年获牛津大学博士学位；此后，在芝加哥大学和曼彻斯特大学进行博士后研究。1952 年，被任命为伦敦国王学院理论物理学教授，并于 1954 年被任命为理论化学教授。由于他对大脑和人工智能的兴趣，1967 年，他搬到爱丁堡大学与同事共同创建了机器智能和感知系，后来，又到英国布莱顿苏塞克斯大学的实验心理学系。1981 年，引入了计算机视觉界中的基本矩阵和估计该矩阵的八点算法。他于 1988 年退休。由于他在开发音乐理解计算模型方面的工作，在 90 年代被谢菲尔德大学授予荣誉音乐博士学位；2004 年被授予苏塞克斯大学的名誉教授。

9. Houssam"Sam" Mahmoud Karara（1928-09-05－1992-11-15）

1949 年在埃及开罗大学获得了学士学位，为埃及公共工程部工作 5 年。后成为 ETH 的研究生，1956 年获得大地测量博士学位，在瑞士联邦摄影测量研究所担任科学合作者（1956－1957）。1957 年加入伊利诺伊大学土木工程助理教授，于 1961 年晋升为副教授，1966 年晋升为教授；1989 年退休。Karara 教授极力推动生物医学摄影测量技术的发展，导致称为 biostereometrics。与他的学生 Abdel-Aziz 一起开发的直接线性变换（direct linear transformation，DLT）改变了摄影测量的计算过程，极大地扩大了其应用范围。

10. Duane Brown（1929-08-20－1994-07-30）

1951 年获耶鲁大学数学学士学位，此后，在 University of Minnesota 学习一年，尽管他完成了所有数学硕士所要求的课程，但由于无力支付学费，无法获得学位。1952 年他加入 Schmid 的 BRL 实验室，使用弹道相机进行大地测量确定卫星的轨道路径，这是他第一次接触摄影测量。在以后几年的工作中，他对解析摄影测量、摄影大地测量、最小二乘平差、统计误差理论都作出了显著贡献。1955 年，他离开 BRL 加入了 RCA Millllse Test Project，在那里开发出新的相机检校方法和光束法平差的数学模型，可以同时解算外方位元素、相机参数、径向透镜畸变、连接点物方坐标。1961 年，他加入佛罗里达州仪器公司担任研究和分析部门主任。1963 年，他购买了这个部门，成立 DBA（Duane Brown and Associates）公司，1977 年他购买了该公司摄影测量和大地测量分部，成立了 Geodetic Services Inc.（GSI），1998 年 GSI 被 Titan Systems 收购。此后，该公司一直致力于高精密工业摄影测量的工作。1988 年获斯图加特大学荣誉博士，F. Ackermann 在颁奖时说："我毫不犹豫地称他为杰出的科学家，他在创造和建立解析摄影测量方面，比任何其他个人的贡献都大，并将其性能发展为真正的极致。"

A Brief History and Essentials of Bundle Adjustment

SHAN Jie[1]

1 School of Civil Engineering，Purdue University，West Lafayette，IN 47907，USA

Abstract：Bundle adjustment is a generic theory and method for image-based positioning in photogrammetry，computer vision and robotics. Since its inception in the 1950's，the joint efforts from various disciplines have led bundle adjustment to a rather comprehensive and complete development in both theory and method. This paper attempts to introduce the origin of the bundle adjustment，the establishment and extension of the mathematical models from the perspective of historical development. We then discuss its methods of dealing with systematic errors and gross errors. Numerical solution techniques are presented from the view point of mathematic optimization. The time span for the work described in this paper covers roughly 60 years since the inception of bundle adjustment. The contributions cited in this paper are mainly from photogrammetry，but also include representative work in geodesy，computer vision，and robotics. This paper concludes with several recent developments in bundle adjustments. At the end，this article is accompanied by a brief biography of several key scholars in the history of bundle adjustment.

Key words：bundle adjustment；systematic errors；gross errors；brief history

Author：SHAN Jie，PhD，professor. His research interest is geospatial data processing. E-mail：jshan@purdue.edu