

一种快速收敛发散三角级数的有效算法^{*}

俞慧丹

(浙江师范大学物理系, 金华 321004) (北京大学非线性科学中心 100871)

摘 要 针对 Bensimon 方程中出现的无穷发散三角级数求和问题, 提出一种快速收敛发散三角级数算法, 并举例说明其应用。

关键词 无穷发散三角级数 收敛

中图分类号 O241

0 引言

不可压缩流体的流动日益成为非线性科学中各类研究的主题。尽管所涉及方程的非线性导致人们只能在非常特殊的情形下才能找出其精确解, 但许多令人感兴趣的流动特性还是只能通过其非线性来寻找。近 20 年来, 计算机的广泛普及大大加速了这一研究的进程。在研究提炼理论模型的同时, 众多学者热衷于寻找合适的数值方法进行模拟和求解。

1986 年, Bensimon^[1] 应用保形变换方法在复平面上研究被小粘性流体驱动的粘性流动的界面演化, 巧妙地利用在单位圆周上定义的实函数的 Fourier 展开系数延拓单位圆内的复函数, 微分后从圆内推到圆周, 得到界面随时间的演化方程, 这种方法物理图象清晰, 过程简单明了, 研究平面非线性问题有其优越性。但由于方程涉及无穷发散 Fourier 级数求和, 数值求解有困难。

本文提出一种快速收敛发散三角级数算法, 适用于级数前系数正负交替且绝对值接近的情形。并以非奇性的 Saffman-Taylor 解析解^[2] 作为初始条件, 数值求解 Bensimon 方程, 说明其应用。

1 问题描述

考虑在宽为 $w = 2\pi$, 相距为 b ($b \ll w$) 的 Hele-shaw 盒^[3] 中被小粘性流体驱动的粘性流动, 在 x 正无穷远处, 流动速度 u 保持恒定。

令 $z = x + iy$, $\Phi = \varphi + i\psi$ 其中 φ 和 ψ 分别为速度势和流函数, 不计表面张力时, 两流体界面处 $\varphi = 0$ 。将流体保形变换到复平面 $\zeta = e^{-\Phi}$, 界面处对应圆周 $\zeta = e^{-i\psi}$ 。

已知 $t = 0$ 时的界面形状, 则界面曲率为

$$\kappa(\psi) = -\text{Im}(\partial_{\bar{z}}^2 \psi / \partial \bar{z}) / |\partial \bar{z}| \quad (1)$$

如果初始界面是对称的, 则 Bensimon 方程可写为

$$\partial_{\bar{z}}(\psi, t) = i\partial_{\bar{z}} \left(\frac{1 - 2d_0 \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos n\psi}{|\partial \bar{z}|^2} - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\psi \right) \quad (2)$$

其中 d_0 为无量纲表面张力系数, 而

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\kappa(\psi)}{2} \cos n\psi d\psi \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - 2d_0 \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos n\psi}{2 |\partial_{\psi} \varphi|^2} d\psi \quad (4)$$

2 发散三角级数的快速收敛方法

原则上说,应用普通的插分方法,给定 $z(\psi, 0)$,按方程(2)可数值求解 $z(\psi, t)$ 。但一个不可忽视的问题是(2)中 d_0 项 na_n 是一发散级数,不能用有限项求和来代替,考虑到 a_n 随 n 正负交替且绝对值接近,作变换

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos n\psi &\approx \sum_{n=1}^N na_n (e^{in\psi} + e^{-in\psi}) = \frac{1}{1+e^{i\psi}} \sum_{n=1}^N na_n e^{in\psi} (1+e^{i\psi}) + \frac{1}{1+e^{-i\psi}} \sum_{n=1}^N na_n e^{-in\psi} (1+e^{-i\psi}) \\ &= \sum_{n=1}^N A_n \cos n\psi + \frac{\sin \psi}{1+\cos \psi} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\psi \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $A_n = na_n + (n-1)a_{n-1}$, 是收敛级数。

进一步地,我们考虑

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N na_n (e^{in\psi} + e^{-in\psi}) &= \frac{1}{(1+e^{i\psi})^2} \sum_{n=1}^N na_n e^{in\psi} (1+e^{i\psi})^2 + \frac{1}{(1+e^{-i\psi})^2} \sum_{n=1}^N na_n e^{-in\psi} (1+e^{-i\psi})^2 \\ &= \frac{1}{1+\cos \psi} \left(\cos \psi \sum_{n=1}^{N+2} A_n \cos n\psi - \sin \psi \sum_{n=1}^{N+2} A_n \sin n\psi \right) \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$n=1 \text{ 时, } A_n = na_n \quad (7a)$$

$$n=2 \text{ 时, } A_n = na_n + 2(n-1)a_{n-1}, \quad (7b)$$

$$n=N+1 \text{ 时, } A_n = 2(n-1)a_{n-1} + (n-2)a_{n-2} \quad (7c)$$

$$n=N+2 \text{ 时, } A_n = (n-2)a_{n-2} \quad (7d)$$

$$\text{其余 } n, A_n = na_n + 2(n-1)a_{n-1} + (n-2)a_{n-2} \quad (7e)$$

这样 A_n 由 $a_n, 2a_{n-1}, a_{n-2}$ 相加而成,收敛速度大大加快。原则上还可以相邻的 4 项, 5 项……组合相加,视所研究问题所需的精度和收敛速度而定。

3 举例

用非奇性的 Saffman-Taylor 解析解^[2]

$$z = 2(1-\lambda) \ln[-(e^{i\psi} + 1 + \epsilon)] + i\psi \quad (8)$$

其中 ϵ 为一个小参量,其大小决定指的长度。

取 $\lambda=0.5, \epsilon=0.01, d_0=0.01$, 利用(1)、(3)两式,求得 $\kappa(\psi)$ 和 a_n 。数值计算表明,按(5)式, $N=200$ 时, A_N 收敛到 $5.6E-4$, $N=800$ 时, A_N 收敛到 $2.7E-5$; 按(6)式, $N=59$ 时, A_N 收敛到 $2.7E-5$, $N=100$ 时, A_N 收敛到 $6E-6$, 增加 A_n 的组合项数,可以使 A_N 在更小的 N 下收敛到更高的精度。图 1 是按(6)式求解的不同时刻 Bensimon 方程的数值解。

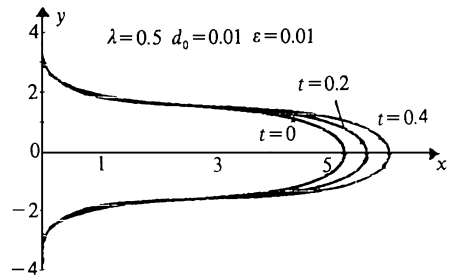


图 1

4 结语

值得一提的是数值求解高度非线性的 Bensimon 方程并非只碰到无穷发散三角级数的求和问题,还涉及各种各样的稳定性问题,稍有疏忽就难以计算下去。这些问题将另文探讨。

致谢 作者感谢北京大学物理系赵凯华教授的指导和帮助。

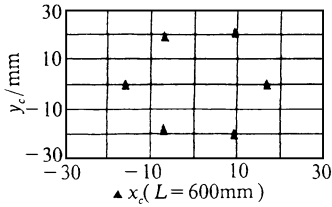


图 5 多底电极分电流控弧范围
仿真结果之一

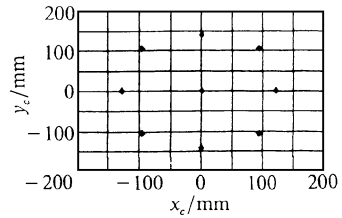


图 6 倾动顶电极控弧范围的
仿真结果之一

参考文献

- 1 Bendzsak G J and Mueller E G. Electromagnetic Effects within DC Arc Furnace. 1994 McMaster Symposium on Iron & Steel making.
- 2 "Development of the CLECIM-KSC Type DC Arc Furnace". KAWASAKI Steel Technical Report No. 29, Nov. 1993.
- 3 朱文佳等主编.《电弧炉-炉外精练技术》(第三辑)中国金属学会.《钢铁》编辑部, 1991.
- 4 《钢铁译文集》(直流电弧炉炼钢专辑). 马鞍山钢铁公司钢铁研究所, 1994. 2.

COMPUTER SIMULATION OF THE ARC DEFLECTION AND ITS CONTROL IN DC ARC FURNACE

Hong Xin Zhu Shoujun Xie Shuyuan
(Shanghai University, 200072)

Liu Junjiang Fu Runsheng Luo Jianjiang
(Bao Shan Iron and Steel Corporation Shanghai 201900)

ABSTRACT Based on the principle of mutual action of micro electric currents in DC arc column and dynamic balance of electromagnetic forces in an arc region caused by spatial current loading wires, mathematical models of numerical simulation are proposed for DC arc deflection, arc deflection control by multi-bottom-electrodes and by inclination of top electrode. Computer simulations are performed to investigate the deflection phenomenon and its control.

KEY WORDS DC arc furnace; arc deflection; computer simulation; mathematical model.

(上接第 642 页)

参考文献

- 1 Bensimon D. *Phys Rev*, 1986 **A33**: 1302.
- 2 Zhao Kaihua and Yu Huidan. *Comm in Non Sci and Numc Simu*, 1997, **2**(1).
- 3 Hele-Shaw H J S. *Nature*, 1898 **58**: 34.

A FAST EFFICIENT METHOD OF CONVERGING DIVERGENT FOURIER SERIES

Yu Huidan

(Phys Dept of Zhejiang Normal Univ Jinhua 321004) (Nonlinear Science Center of Peking Univ, Beijing 100871)

ABSTRACT A fast efficient method is presented for converging fourier series, which comes from Bensimon equation. As an example the simulation is given for the evolution of nonsingular saffman-Taylor finger in the presence of surface-tension.

KEY WORDS divergent infinite series; converge.